3. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

3.1. Présentation

- Les RII sont des systèmes LIT
- Ils sont à "mémoire infinie", c 'est-à-dire qu 'ils gardent pendant un temps infini la mémoire du signal d 'entrée, grâce à une boucle de retour
- Principal intérêt : permettent des fonctions de filtrage + sélectives que les RIF (cf. # coefficients)
- Inconvénients : Possibilité d 'avoir des filtres instables, phase non linéaire, pbs de réalisation

- La réponse d'un filtre RII à un signal x(n) est :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{L} a_l x(n-l) - \sum_{k=1}^{K} b_k y(n-k)$$

- D'où la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{\sum_{l=0}^{L} a_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=1}^{K} b_k z^{-k}} = a_0 \frac{\prod_{l=1}^{L} (1 - Z_l z^{-1})}{\prod_{k=1}^{K} (1 - P_k z^{-1})}$$

$Z_l\ (1 \leq l \leq L)$ et $P_k\ (1 \leq k \leq K)$ étant respectivement les zéros et les pôles de $H(z)$.

3.2. La cellule du premier ordre

- Soit le système qui à x(n) fait correspondre y(n) :

$$y(n) = a_0\, x(n) - b_1\, y(n-1)$$

La réponse du système à une impulsion $\delta(n)$ est :

$y(-1) = 0 \qquad y(0) = a_0 \quad y(1) = -\, b_1\, a_0 \quad y(n) = (-\, b_1)^n\, a_0$

On voit que l 'on garde 1 trace de $\delta(n)$ durant 1 temps infini.

La condition de convergence :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|b_1\right|^n < \infty \text{ soit } \left|b_1\right| < 1$$

- La TF de ce filtre est :

$$H(\omega) = \frac{a_0}{1 + b_1 \, e^{-j\omega}}$$

- L 'amplitude est donnée par :

$$\left|H(\omega)\right|^2 = \frac{a_0^{\,2}}{1 + 2b_1 \cos(\omega) + b_1^{\,2}}$$

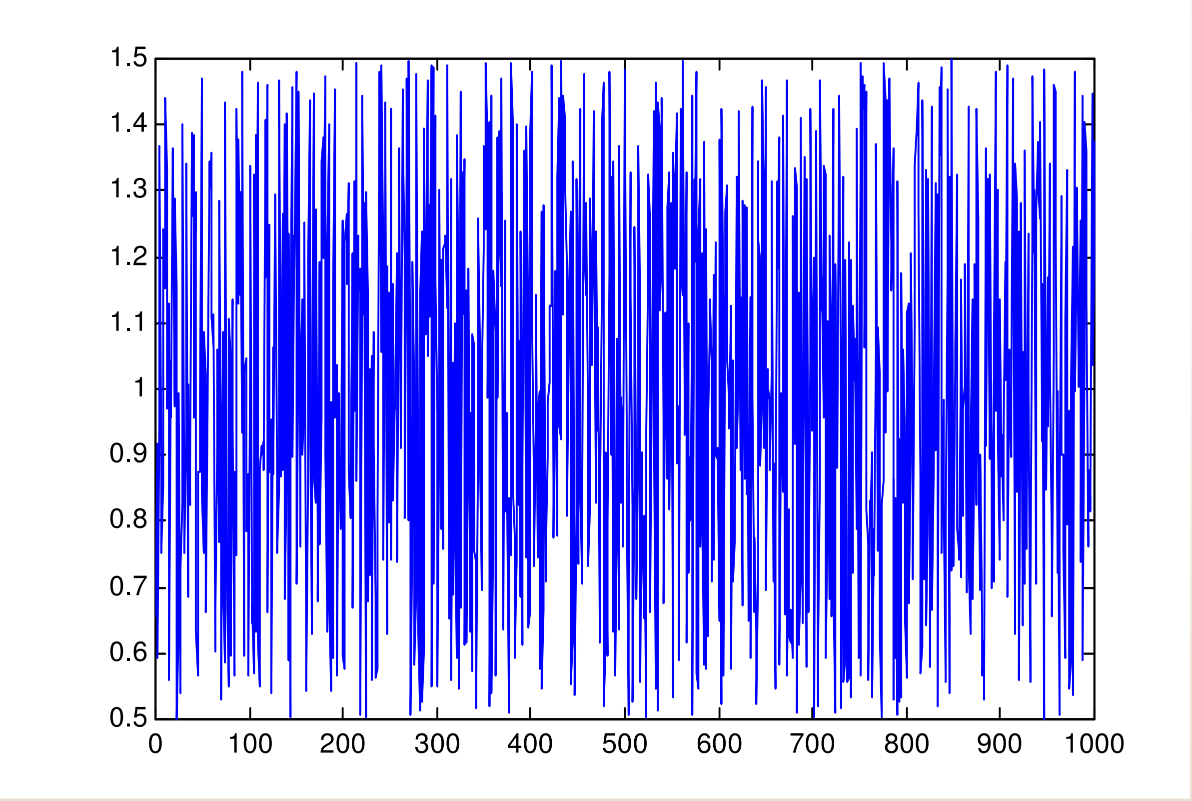
- et la phase :

$$\varphi(\omega) = Arctg\left(\frac{-b_1 \sin(\omega)}{1 + b_1 \cos(\omega)}\right)$$

Exemple d 'utilisation d 'un RII du premier ordre

- imaginons que l'on reçoive :

  $x(n) = C + w(n)$, où $w(n)$ est un bruit blanc gaussien centré.



- Pour estimer la constante C on fait une moyenne du signal à l'aide des échantillons successifs : on réalise un RIF

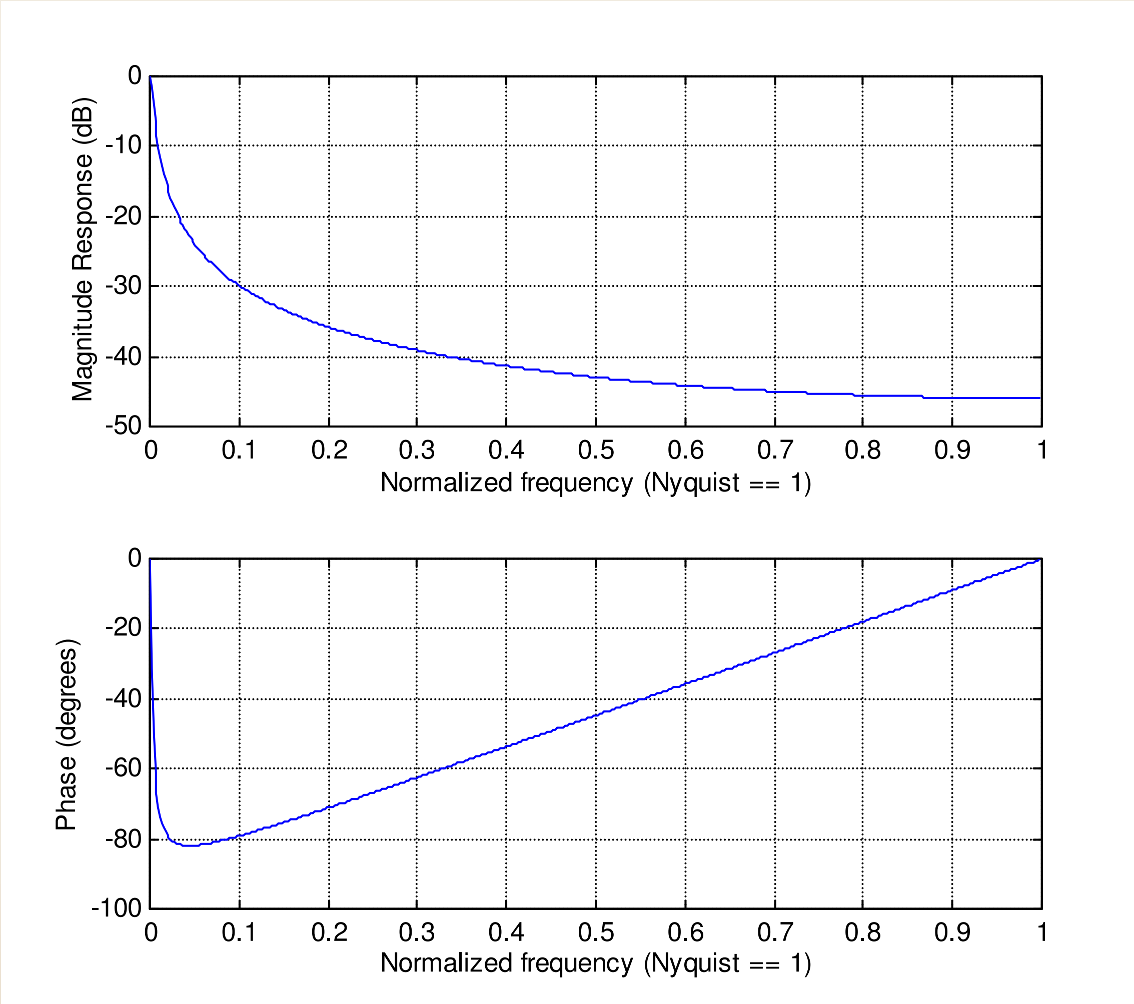
$$\text{Par exemple : } \hat{C}(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(n-m)$$

- pour une estimation précise, on moyenne sur un grand nombre d'échantillons
- => complexité calculatoire (mémoires, additions) importante
- On peut aussi, de manière plus efficace, faire une estimation récursive à l'aide d'une cellule RII du premier ordre.

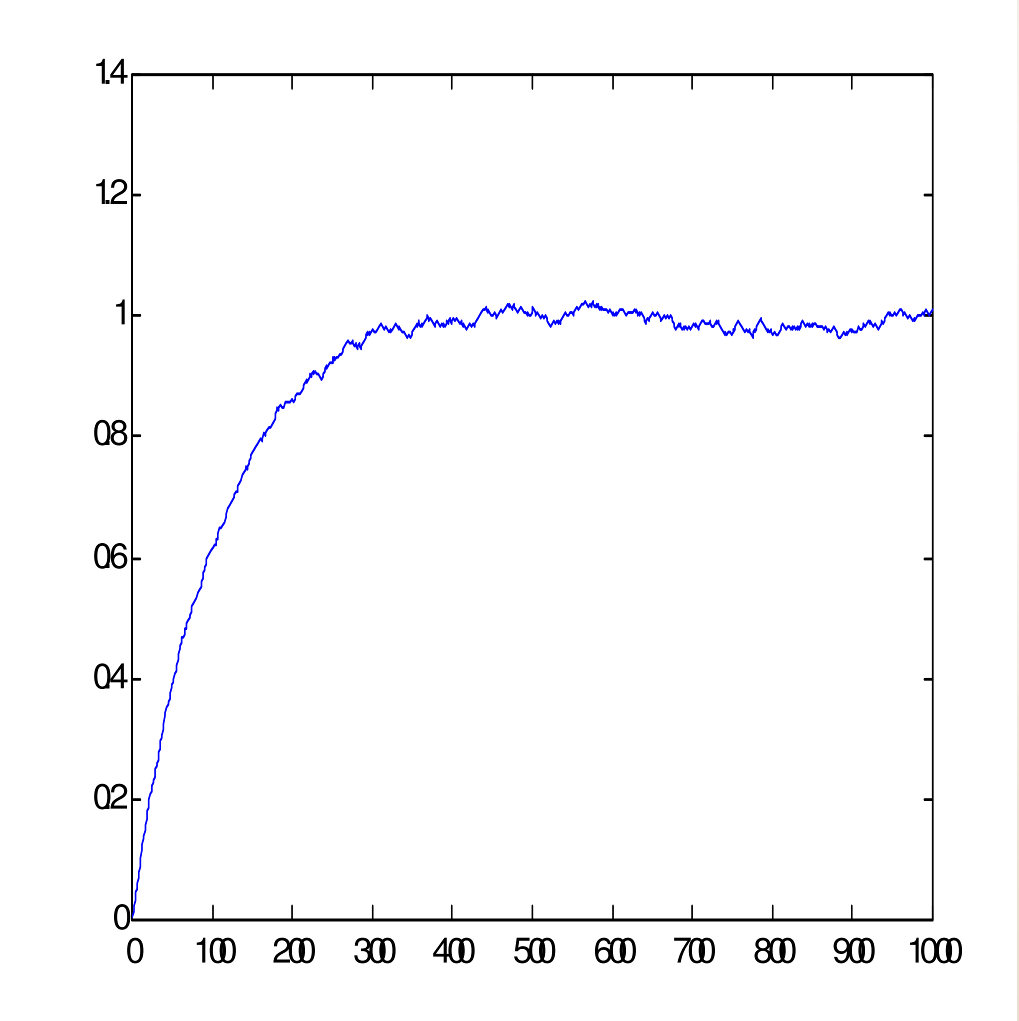
$$H(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1}} \qquad \text{avec par exemple } b_1 = -0.99$$

Pour a_0, on peut choisir de ne pas amplifier la fréquence 0 (gain statique, $H(1) = 1$), d'où $a_0 = 0.01$.

- La réponse en fréquence de ce filtre est :



- Le signal de sortie y(n) est une estimation récursive de C :
- démo (iir1_ld.m)



3.3. Caractéristiques générales des RII

- Équation générale :

$$y(n)=\sum_{l=0}^{L}a_l\,x(n-l)-\sum_{k=1}^{K}b_k\,y(n-k)$$

La TZ s'écrit : $H(z) = \dfrac{\sum_{l=0}^{L} a_l z^{-l}}{1+\sum_{k=1}^{K} b_k z^{-k}}$

- Les racines du numérateur : « zéros » du filtre
- Les racines du dénominateur : « pôles » du filtre
- Condition de stabilité : pôles à l 'intérieur du cercle unité

3.4. Synthèse des RII

- Comme pour les RIF, les RII sont utilisés souvent pour mettre en forme 1 signal
- => généralement, pour satisfaire à des conditions imposées dans le domaine fréquentiel

$|H(\nu)|$ approche au mieux la fonction $|H_i(\nu)|$ représentant le filtre idéal

- La synthèse des filtres analogiques ayant été très développée, la synthèse des RII s 'appuie sur la conversion continu-discret.
- Pour cela, une règle de transformation entre la représentation Laplacienne et la transformée en z (p = *f*(z))

- Cette fonction doit vérifier plusieurs conditions :
  - si le filtre analogique de départ est stable, il faut que sa transformée numérique soit stable
  - de la première condition, on en déduit que le demi plan Re(p) < 0 doit se transformer en l'intérieur du cercle unité
  - l'axe imaginaire doit se transformer en |z| = 1.
- on essaye de trouver une équivalence pour l'intégration :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{p}$$

- L'intégrale de la fonction x(t) peut être approchée (méthode des trapèzes) par :

$$y(t) \approx y(t-dt) + \frac{x(t)+x(t-dt)}{2}T$$

- On a alors :

$$\frac{1}{p} = \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Cette transformation est appelée transformation bilinéaire,

et la réciproque s'écrit :

$$z = \frac{1+pT/2}{1-pT/2}$$

Examinons la transformation de l'axe imaginaire $p = j\omega$:

$$z = \frac{1+j\omega T/2}{1-j\omega T/2} = \frac{(1+j\omega T/2)^2}{1+(\omega T/2)^2} = |z|\, e^{j\varphi(z)}$$

D'après cette formule, $|z| = 1$ et $\varphi(z) = 2\,\mathrm{arctg}(\omega T/2)$

=> correspondance entre les deux domaines de stabilité

- Attention, relation non linéaire entre les fréquences analogiques et numériques.
- Cette relation est donnée par :

$$e^{2\pi f_n T} = \frac{1 + j\pi f_a T}{1 - j\pi f_a T}$$

On a aussi :

$$2\pi f_n T = 2arctg\left(\pi f_a T\right)$$

Et donc :

$$f_a = \frac{1}{\pi T} tg\left(\pi f_n T\right)$$

- Résumé : la transformation bilinéaire est une règle de transformation entre la représentation Laplacienne et la transformée en z
- => permet de transformer un filtre analogique prototype en sa contrepartie numérique
- Les filtres analogiques prototypes sont construits en se donnant une fonction $A^2(\omega)$ avec $\omega = 2\pi f$, avec :

$$A^2(\omega) = |F(j\omega)|^2 = F(j\omega)F(-j\omega)$$

on en déduit :

$$A^2\left(\frac{p}{j}\right) = F(p)F(-p).$$

filtre de Butterworth

$$A^2(\omega) = \frac{1}{1+\omega^{2m}} \text{ où m est un entier}$$

$$\text{Ainsi } A^2\left(\frac{p}{j}\right) = \frac{1}{1+(-1)^m p^{2m}}.$$

Caractéristiques : Pas d'ondulations dans la bande passante et atténuée mais bande de transition est très large

- Filtre de Tchebycheff :

$$A^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_m^2(\omega)}$$

$T_m(\omega)$ est le polynôme de Tchebycheff de degré m :

$T_0(\omega) = 1,\ T_1(\omega) = \omega,\ T_{m+1}(\omega) = 2\omega T_m(\omega) - T_{m-1}(\omega)$ avec $m > 0$

- filtre de Cauer, ou elliptique

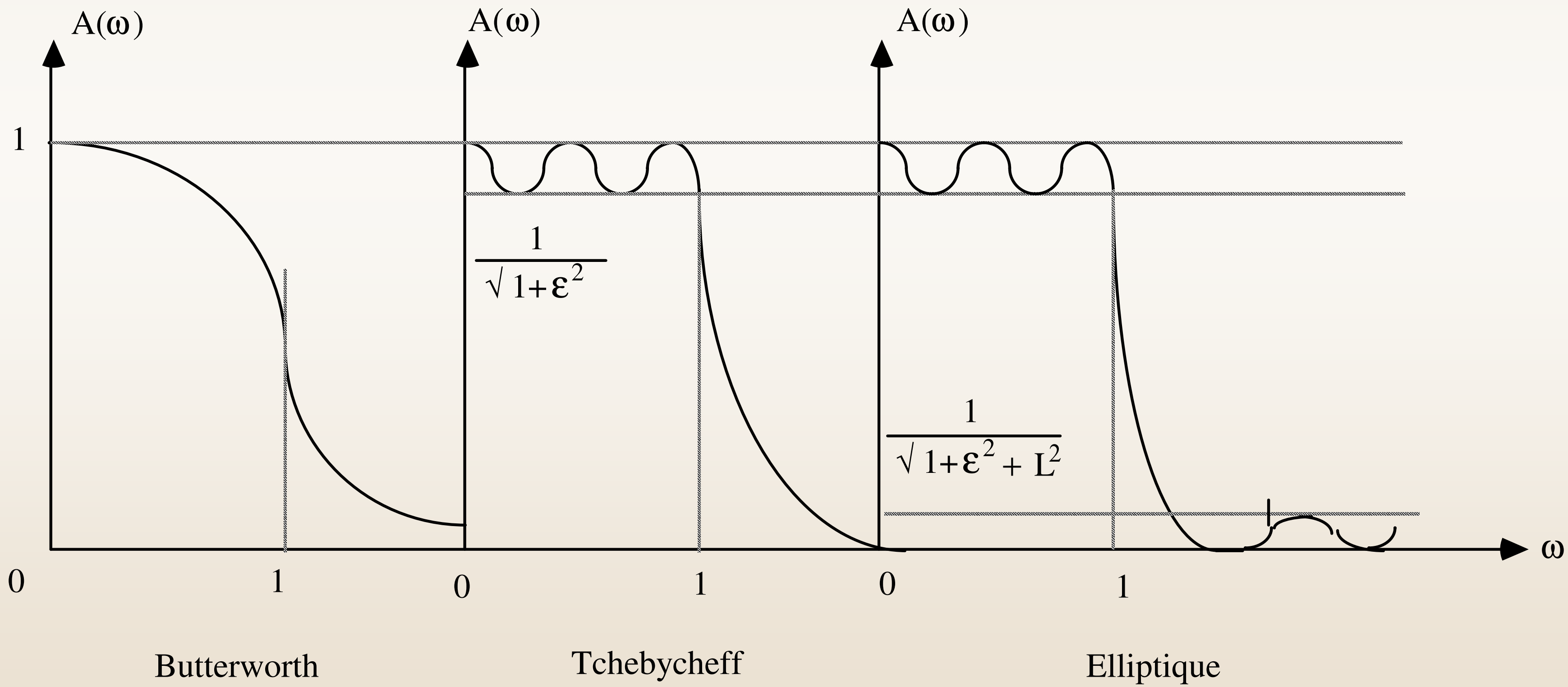
$$A^2(\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon^2 R_m^2(\omega, L)}$$

$R_m(\omega,\mathrm{L})$ est une fonction rationnelle de Tchebycheff

❑ Récapitulatif :

Le choix de l 'un ou l 'autre de ces filtres résulte du compromis :

bande de transition, taux d'ondulation dans la bande passante et atténuée



Synthèse d 'un filtre analogique

- Les fonctions de transferts sont données pour des filtres passe-bas normalisés ($\omega_c = 1$)
  - transformation passe-bas normalisé en passe-bas

    $t(p) = p/\omega_c$
  - transformation passe-bas normalisé en passe-haut

    $t(p) = \omega_c/p$
  - transformation passe-bas normalisé en passe-bande

$$t(p) = \frac{p^2 + \omega_{c1}\omega_{c2}}{p(\omega_{c2} - \omega_{c1})}$$

  - transformation passe-bas normalisé en coupe-bande

$$t(p) = \frac{p(\omega_{c2} - \omega_{c1})}{p^2 + \omega_{c1}\omega_{c2}}$$

Démarche de numérisation

- Pour synthétiser un RII satisfaisant aux contraintes imposées, on utilise la démarche suivante :

  1) Déterminer le cahier des charges en terme de fréquence pour le filtre à réaliser

  2) Déterminer la fréquence d'échantillonnage

  3) Ajuster les fréquences en utilisant la conversion

  4) En déduire le filtre prototype convenable

  5) Numériser en utilisant la transformation bilinéaire

  6) Eventuellement ajuster le gain statique

- Exemple :

On veut réaliser un filtre avec les caractéristiques suivantes :

- passe-bas avec une fréquence de coupure de 0.1 Hz
- fréquence d'échantillonnage 1 Hz
- atténuation à 0.3 Hz d'au moins 40 dB avec une ondulation maximale dans la bande de 1 dB.

Les fréquences analogiques sont 0.1034 et 0.4381.

=> Il nous faut un filtre tel que l'atténuation soit d'au moins 40 dB lorsque la fréquence est multipliée par 4.

Ces performances sont réalisées par un filtre de Tchebychev d'ordre 3 (donné par des tables)

- la réponse en fréquence normalisée s'écrit :

$$H_a(p) = \frac{1}{(1+2.023p)(1+0.497p+1.006p^2)}$$

- La pulsation de coupure vaut 2π *0.103 (on remplace p par p/ω_c)

- On trouve, par transformée bilinéaire :

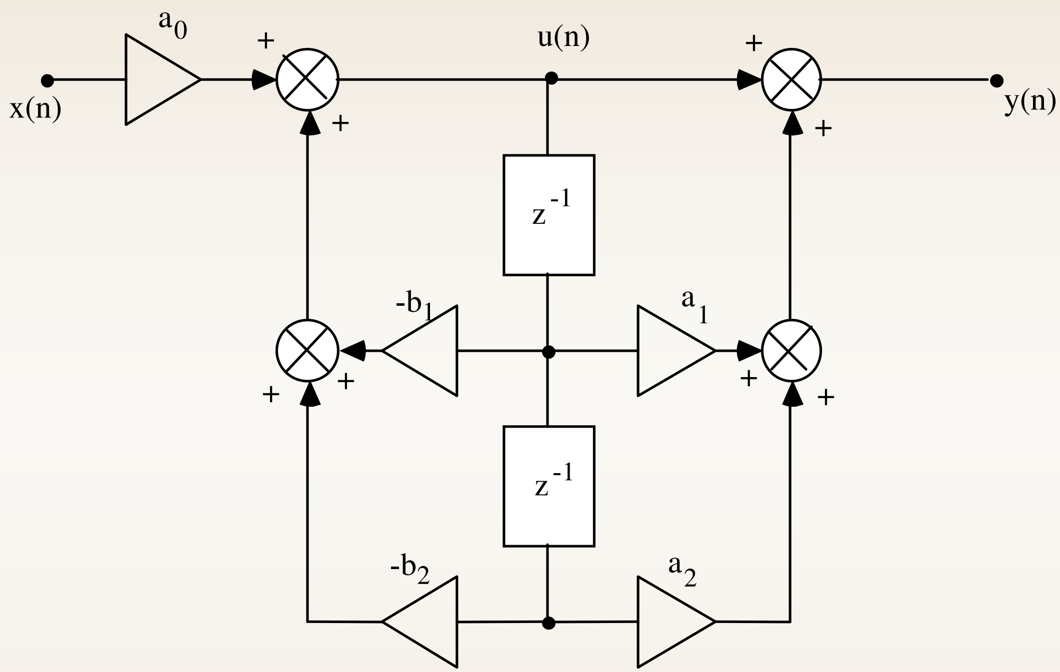
$$H_n(z) = \frac{0.01135+0.034z^{-1}+0.034z^{-1}+0.01135z^{-3}}{1-2.104z^{-1}+1.774z^{-2}-0.524z^{-3}}$$

Implantation des RII

- Comme les RIF, les RII sont réalisés à l 'aide de fonctions simples de multiplications, additions et mises en mémoire.
- La fonction de transfert d'un filtre RII est décomposée en produit ou somme de cellules élémentaires du premier ou du second ordre :

$$H(z) = a0 \frac{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = a0 \frac{N(z)}{D(z)} .$$

- On adopte la structure suivante :



Ainsi : $$u(n) = a_0 x(n) - b_1 u(n-1) - b_2 u(n-2)$$

soit : $$U(z) = a_0 \frac{X(z)}{D(z)}$$

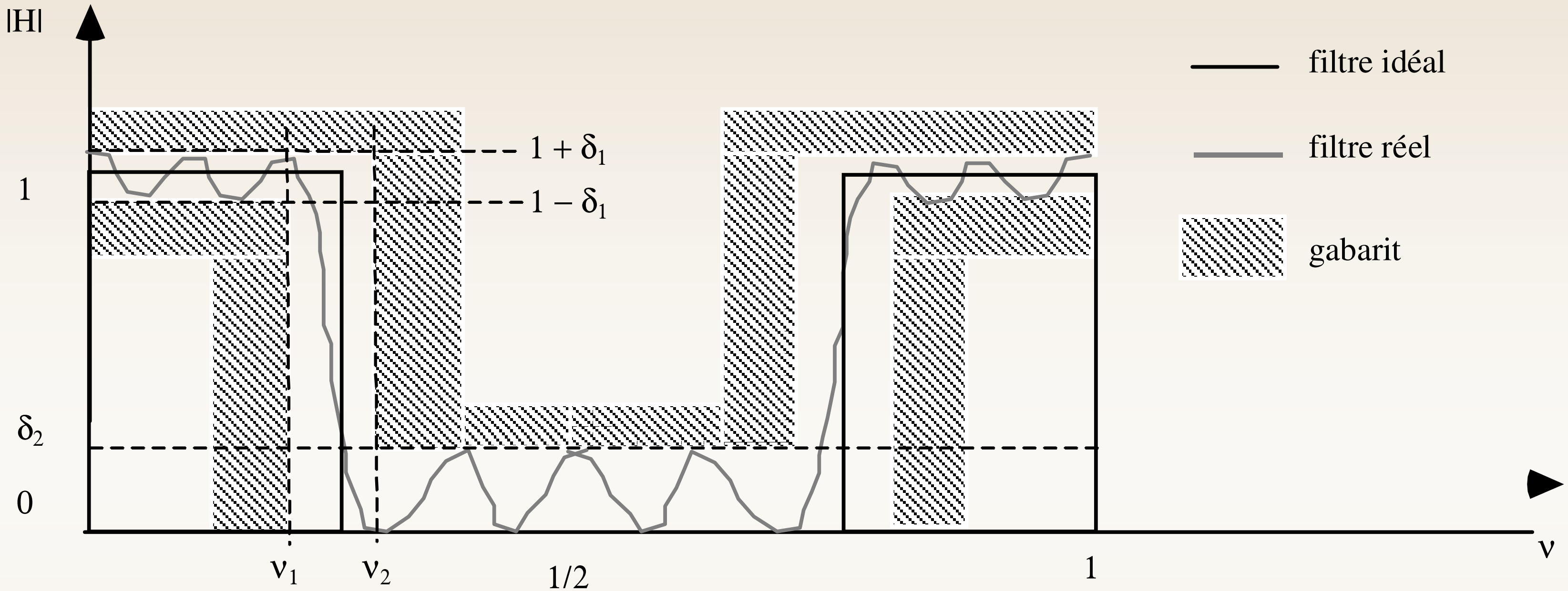
et $$y(n) = u(n) + a_1 u(n-1) + a_2 u(n-2)$$

soit : $$Y(n) = N(z)U(z).$$

- La décomposition en éléments du 1er ordre et du deuxième ordre présente un grand intérêt pratique :

  Elle permet de réduire le nombre de bits nécessaires à l 'implantation

- Comme pour les RIF, on recherche un compromis entre performances et coût
- On cherche à déterminer le nombre de coefficients nécessaires pour satisfaire un gabarit donné



- Comme pour les RIF :

$$Ne \approx 1.08 \ln_{10}\left(\frac{2}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}\right) \ln_{10}\left(\frac{4}{\pi \Delta \nu} \sin(2\pi \nu_1)\right)$$

$$Ne \approx \frac{2}{3\Delta \nu} \ln_{10}\left(\frac{1}{10\,\delta_1 \delta_2}\right)$$

- => conduit à des valeurs beaucoup plus faible que pour les RIF

- Pour le nombre de bits :

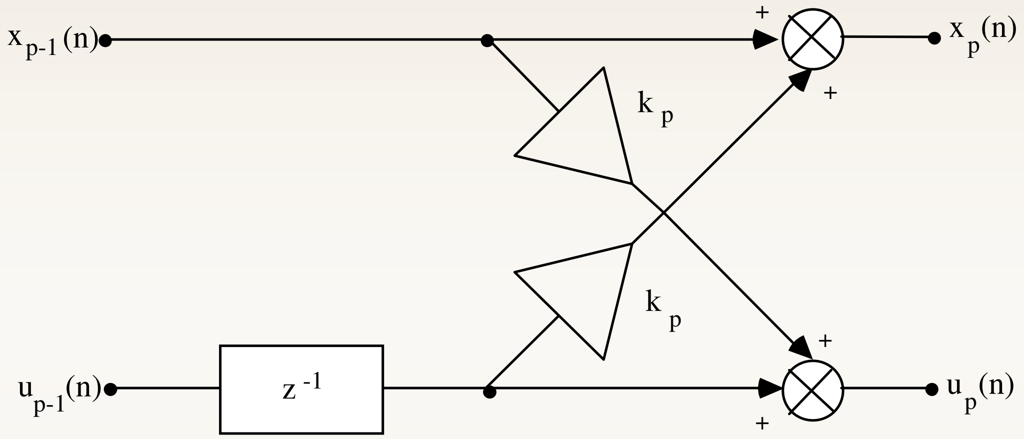
$$b_c \approx lb\left(\frac{1}{\delta_1}\right) + lb\left(\frac{1}{\Delta\nu}\right) + lb\left(\frac{1}{\sin(2\pi\nu_1)}\right)$$

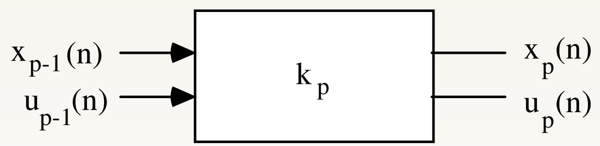
- Les RII demandent plus de bits que les RIF (possibilité d 'instabilité)

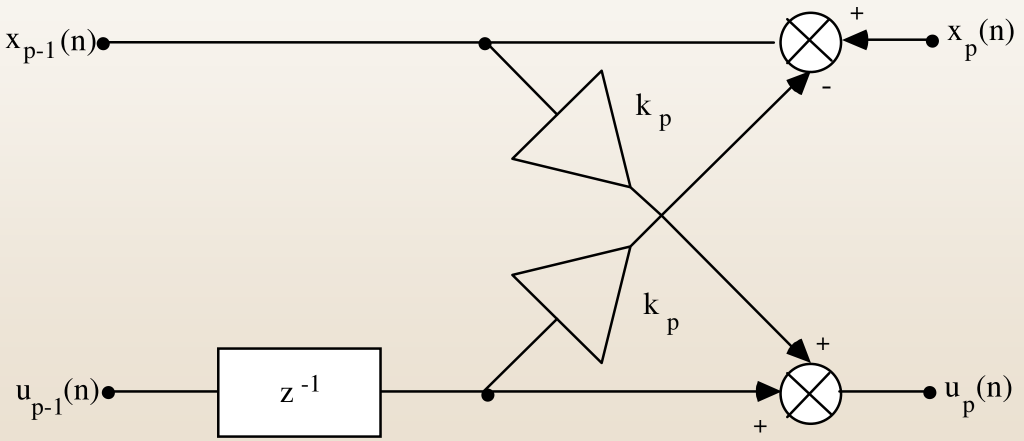
Réalisation de filtres RII et RIF par des filtres en treillis

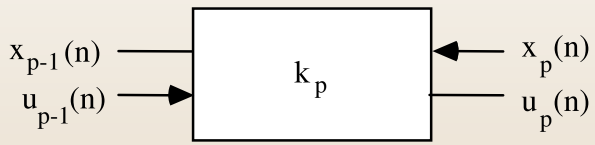
- La structure de treillis apparaît dans l 'analyse et la synthèse de la parole, pour la simulation du conduit vocal, ou dans des systèmes de prédiction linéaire.
- Elle permet de réaliser des RIF ou des RII

Considérons les deux structures élémentaires suivantes:









Pour la première structure :

$$x_p(n) = x_{p\text{-}1}(n) + k_p u_{p\,-\,1}(n-1)$$
$$u_p(n) = k_p x_{p\text{-}1}(n) + u_{p\text{-}1}(n-1)$$

Ainsi : $X_p(z) = X_{p\text{-}1}(z) + k_p z^{-1} U_{p\text{-}1}(z)$ et $U_p(z) = k_p X_{p\text{-}1}(z) + z^{-1} U_{p\text{-}1}(z)$.

Pour la seconde structure :

$$x_{p\text{-}1}(n) = x_p(n) - k_p u_{p\text{-}1}(n-1)$$
$$u_p(n) = k_p\, x_{p\,\text{-}1}(n) + u_{p\text{-}1}(n-1)$$

Ainsi : $X_{p\,-\,1}(z) = X_p(z) - k_p z^{-1} U_{p\,-\,1}(z)$ et $U_p(z) = k_p X_{p\,-\,1}(z) + z^{-1} U_{p\,-\,1}(z)$.

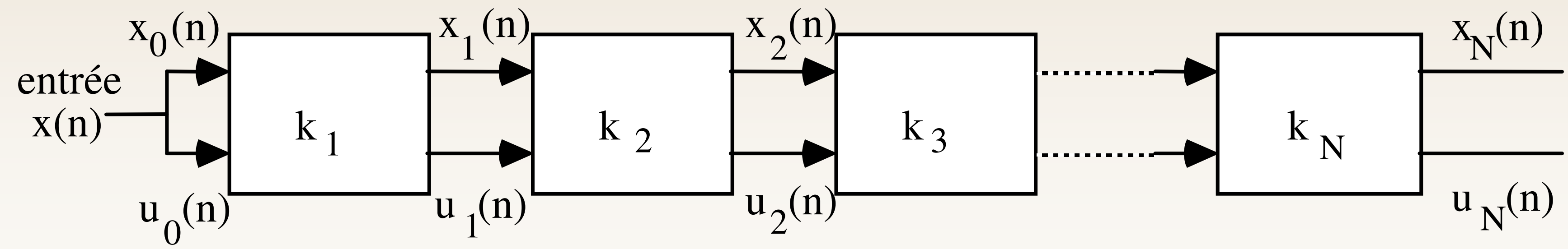
Les relations sur les transformées en z sont donc identiques pour les deux structures. Matriciellement, on peut écrire:

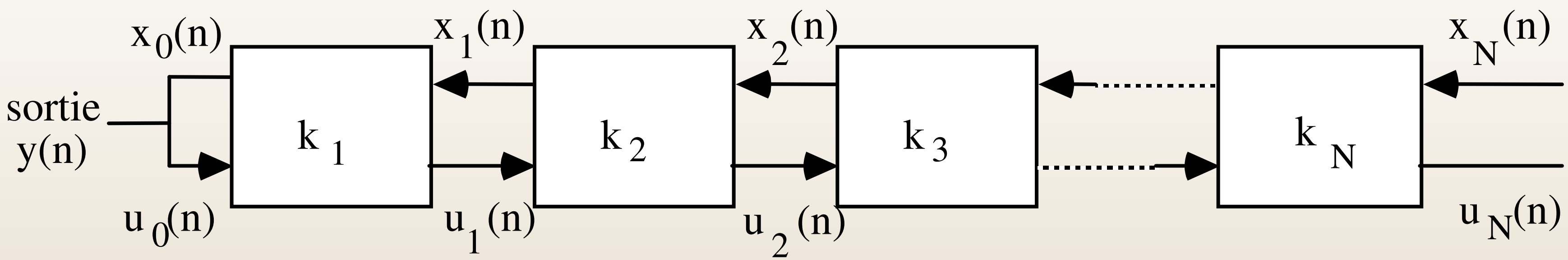
$$\begin{pmatrix} X_p(z) \\ U_p(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k_p z^{-1} \\ k_p & z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{p-1}(z) \\ U_{p-1}(z) \end{pmatrix}$$

Si $|k_p| \neq 1$:

$$\begin{pmatrix} X_{p-1}(z) \\ U_{p-1}(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{1-k_p{}^2} \begin{pmatrix} 1 & -k_p \\ -k_p z & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_p(z) \\ U_p(z) \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant les deux systèmes suivants:





Pour le premier : $x(n) = x_0(n) = u_0(n)$ et $y(n) = x_N(n)$.

Or :
$$\begin{pmatrix} X_N(z) \\ U_N(z) \end{pmatrix} = \left[\prod_{p=1}^{N} \begin{pmatrix} 1 & k_p z^{-1} \\ k_p & z^{-1} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} X_0(z) \\ U_0(z) \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire :

$$Y(z) = X_N(z) = A_N(z)X(z) \quad \text{et} \quad U_N(z) = B_N(z)X(z)$$

où $A_N(z)$ et $B_N(z)$ sont des polynômes en z^{-1} de degré N.

Soit :
$$A_N(z) = \sum_{p=0}^{N} a_N(p) z^{-p} \quad \text{et} \quad B_N(z) = \sum_{p=0}^{N} b_N(p) z^{-p}.$$

Pour le second système :

$$x(n) = x_N(n) \text{ et } y(n) = x_0(n) = u_0(n).$$

Ainsi : $X(z) = X_N(z) = A_N(z)Y(z)$ et $U_N(z) = B_N(z)Y(z)$.

Le premier système réalise la fonction de transfert :

$$H(z) = A_N(z) = \sum_{p=0}^{N} a_N(p) z^{-p}$$

Le second système réalise la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{1}{A_N(z)} = \frac{1}{\sum_{p=0}^{N} a_N(p) z^{-p}}$$ (filtre RII purement récursif).

Notons :
$$\begin{pmatrix} A_n(z) \\ B_n(z) \end{pmatrix} = \left[\prod_{p=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & k_p z^{-1} \\ k_p & z^{-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} A_0(z) \\ B_0(z) \end{pmatrix}$$

Avec : $A_0(z) = B_0(z) = 1$ et $A_n(z) = \sum_{p=0}^{n} a_n(p) z^{-p}$ et $B_n(z) = \sum_{p=0}^{n} b_n(p) z^{-p}$;

on démontre par récurrence sur $n \geq 1$ que :

- degré(A_n) = degré(B_n) = n
- $b_n(p) = a_n(n - p)$ pour $1 \leq p \leq n - 1$
- $b_n(0) = a_n(n) = k_n$
- $b_n(n) = a_n(0) = 1$
- $a_n(p) = a_{n-1}(p) + k_n a_{n-1}(n - p)$ pour $1 \leq p \leq n - 1$.

Ces relations permettent de construire $A_1(z)$, $A_2(z)$ ... jusqu'à $A_N(z)$ à partir des coefficients k_1, k_2, ... k_N. Pour cela, on fait varier n de 1 à N.

Réciproquement, on peut démontrer que:

- $k_n = a_n(n)$
- $a_{n-1}(p) = \dfrac{1}{1-a_n^2(n)}\big(a_n(p) - a_n(n) - a_n(n-p)\big)$ pour $1 \leq p \leq n - 1$.

A partir de $A_N(z)$,

- on construit $A_{N-1}(z)$, $A_{N-2}(z)$, ... jusqu'à $A_1(z)$
- on en déduit successivement k_N, k_{N-1}, ..., k_1. Pour cela, on fait varier n de N à 1.

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- Les zéros de $A_N(z)$ ont un module strictement inférieur à 1.
- Pour $1 \leq n \leq N$ $\quad |k_n| < 1$.

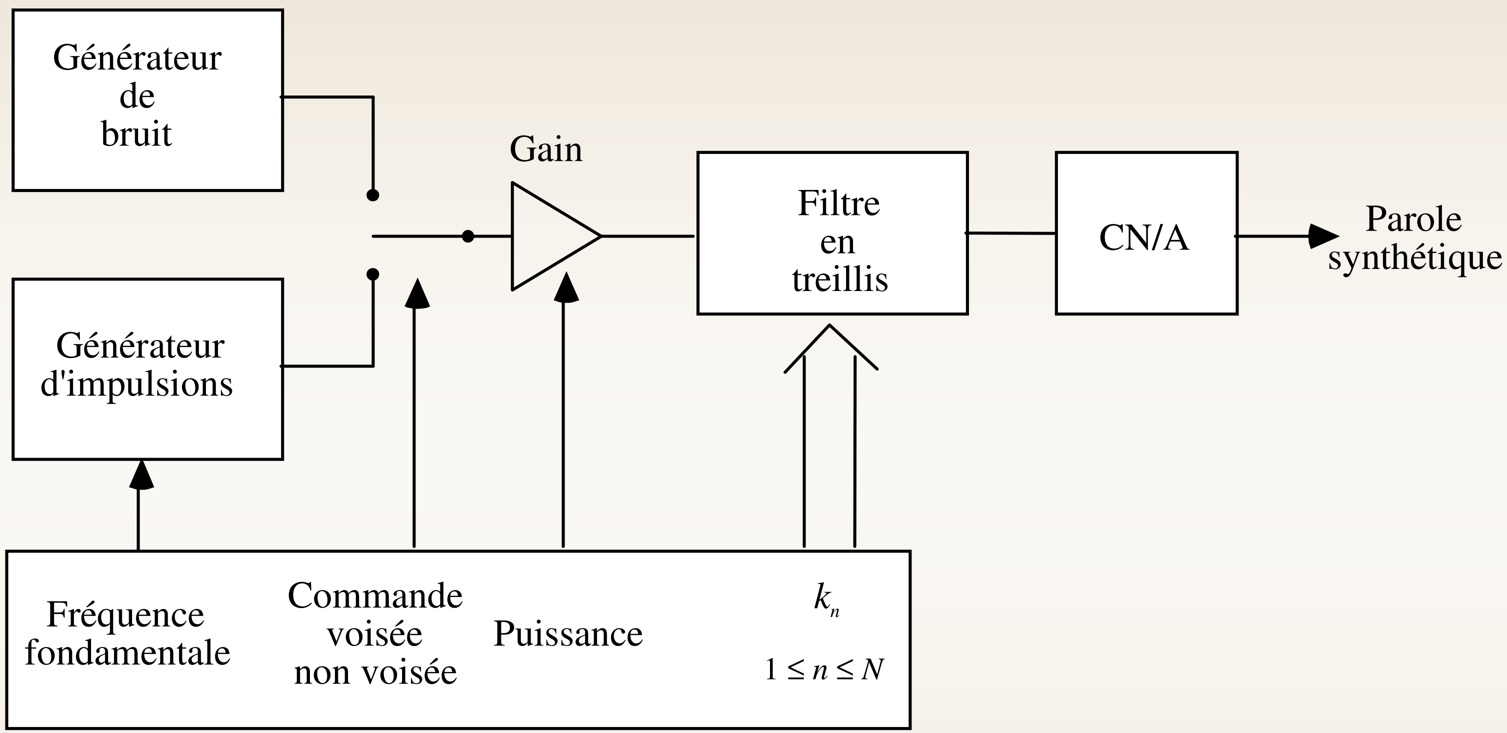
On obtient ainsi un critère simple de stabilité de la fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{A_N(z)}$

réalisée par le second système.

Application du filtre en treillis à la synthèse de la parole

- Les propriétés d'un signal de parole permettent de réduire la quantité d'information le caractérisant.
- Ainsi, on modélise le conduit vocal par un filtre en treillis réalisant la fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{A_N(z)}$.
- L'entrée de ce filtre est un train d'impulsions ou un bruit aléatoire selon la nature du son (voisé ou non voisé).

On obtient alors le synthétiseur suivant :



Les paramètres de commande évoluent dans le temps, notamment les coefficients k_n du filtre en treillis.

L'intérêt d'utiliser ce type de filtre est le contrôle simple de la stabilité ($|k_n| < 1$ pour $1 \le n \le N$).

L'interpolation linéaire entre deux vecteurs de coefficients k_n respectant la stabilité donne aussi un filtre stable ce qui ne serait pas forcément le cas avec les coefficients $a_N(p)$ du polynôme $A_N(z)$.

4. Les signaux analytiques

- Les signaux analytiques sont utilisés dans les opérations de :
  - modulation et de démodulation des signaux
  - multiplexage des fréquences
  - pré-traitement (pour analyse temps-fréquence)
  - calcul d'enveloppe

Définition : signal dont la représentation spectrale ne contient pas de composantes aux fréquences négatives

=> Signaux complexes, reliés par la transformée de Hilbert

Soit un signal $x(n) = x_r(n) + j\, x_i(n)$

tel que $X(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$

Il est clair que : $x_r(n) = 0.5\ (\ x(n) + j\ x^*(n)\ )$

et : $x_i(n) = (0.5/j)\ \ (\ x(n) - j\ x^*(n)\ )$

- La TF de $x_r(n)$ est :

$$X_r(\nu) = 0.5\ (\ X(\nu) + X^*(-\nu)\ )$$

De même,

$$X_i(\nu) = -\ 0.5\ j\ (\ X(\nu) - X^*(-\nu)\ )$$

Comme $X(\nu) = 0$ pour $\nu < 0$,

$$X_r(\nu) = 0.5\ X(\nu) \quad \text{pour } \nu > 0$$

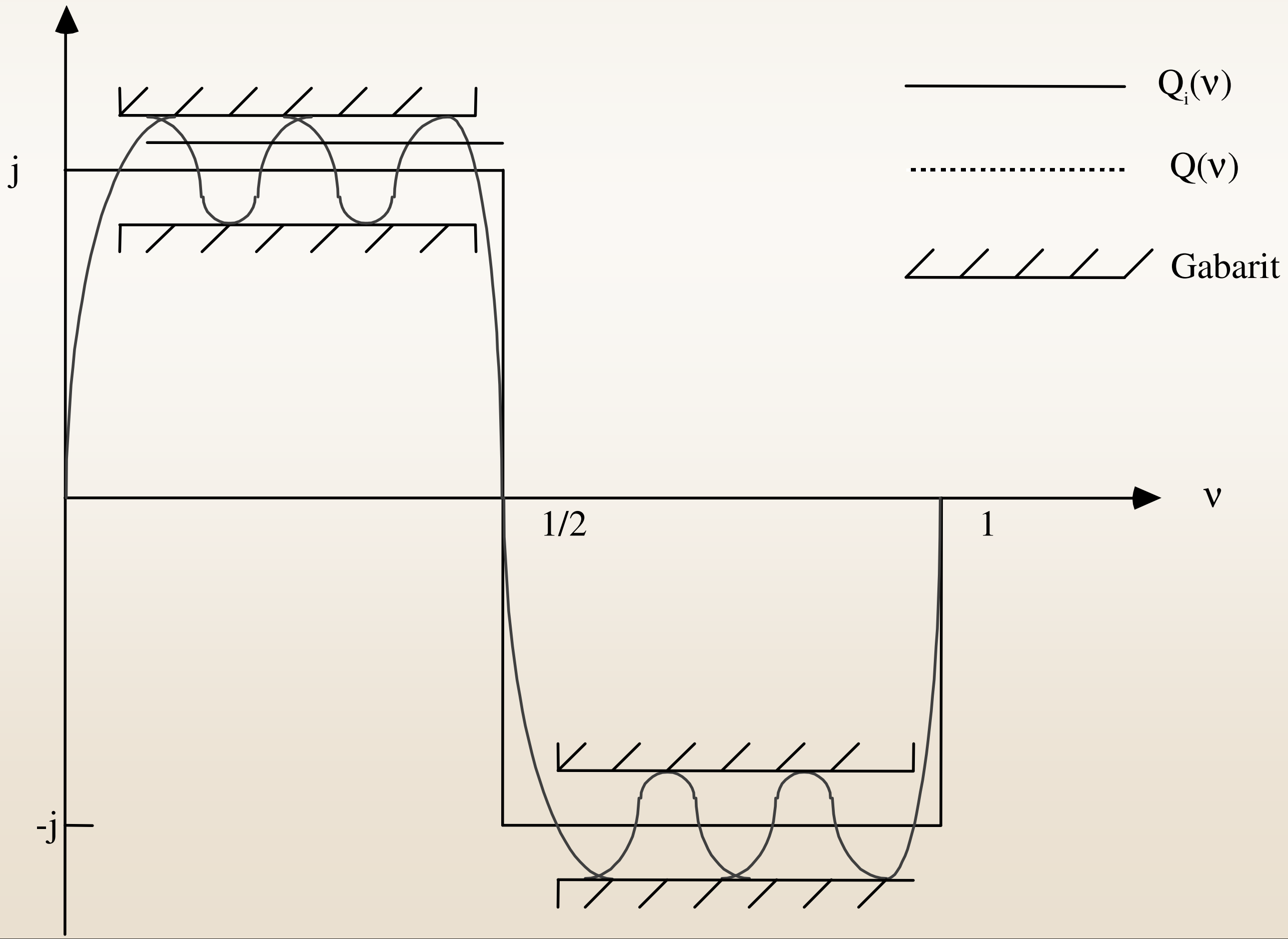
et $$X_r(\nu) = 0.5\ X^*(-\nu) \quad \text{pour } \nu < 0$$

On en déduit que : $X_i(\nu) = -\,j\ X_r(\nu)$ pour $\nu > 0$

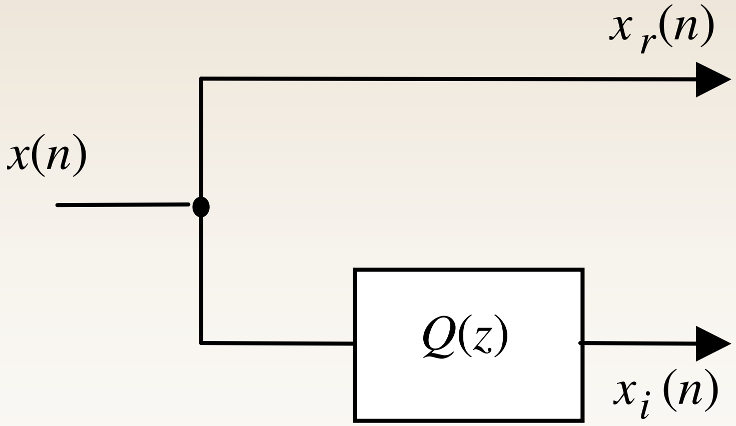
et $$X_i(\nu) = j\ X_r(\nu) \quad \text{pour } \nu < 0$$

=> $X_i(\nu)$ à partir de $X_r(\nu)$ par une rotation de $\pi/2$ des composantes

- L'opération de mise en quadrature est aussi appelé transformée de Hilbert
- Le signal de sortie est appelé alors signal analytique (! sens math.)



Mise en quadrature :

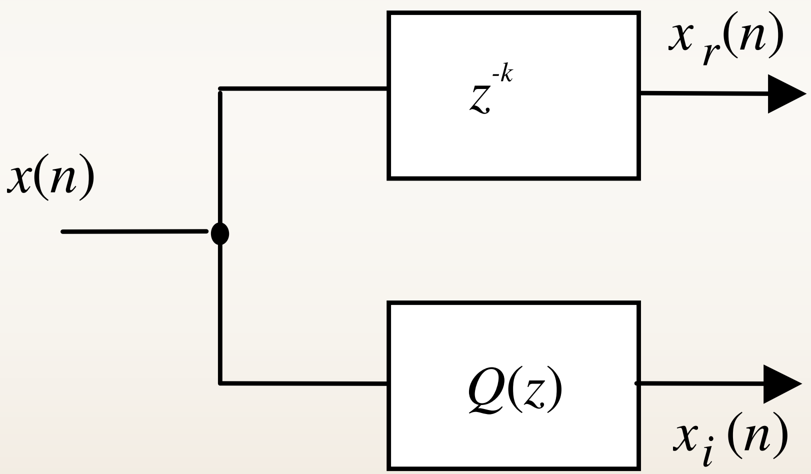


- Le filtre Q(ν), appelé filtre de quadrature, peut être construit par troncature d 'une séquence infinie

$$h(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} j\, e^{j\omega n}\, d\nu + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (-j)\, e^{j\omega n}\, d\nu$$

Il vient : $h(n) = \frac{2}{\pi n}\sin^2\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ Pour n ≠ 0 et h(0) = 0

- Dans la pratique, le filtre de quadrature est causal et de dimension finie
- Souvent, on recherche Q(z) à phase linéaire



Application au calcul d'enveloppe

Si $x_r(n) = A(n)\cos(2\pi * f * n)$

avec A "lent"

$x_i(n) \sim A(n)\sin(2\pi * f * n)$